

Komplekse tal og algebraens fundamentalsætning.

Michael Knudsen

10. oktober 2005

1 Ligningsløsning

Lad $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ betegne mængden af de naturlige tal og betragt ligningen

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbf{N}, a \neq 0.$$

Findes der et naturligt tal $x \in \mathbf{N}$, som løser ligningen? Lad os først kigge på tilfældet, hvor $b = 0$. Da lyder ligningen $ax = 0$, og $x = 0$ er den eneste løsning. Hvis nu $b \neq 0$ (det vil altså sige, at $b > 0$, da $b \in \mathbf{N}$), er $ax + b > 0$ for alle $x \in \mathbf{N}$, så da har ligningen ingen løsning.

Nedtur! Vi har altså brug for flere tal. Heldigvis har vi så de hele tal, $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, som kan hjælpe os. Lad os nu kigge på ligningen

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbf{Z}, a \neq 0,$$

når vi nu har flere tal til rådighed. Kan vi finde en løsning $x \in \mathbf{Z}$ til denne ligning? Ikke altid, for ligningen er ensbetydende med $ax = -b$, så hvis x skal isoleres, må vi skulle dele med a , men det kan vi kun (husk, at vi arbejder i \mathbf{Z}), hvis a går op i b . For eksempel har ligningen $2x + 4 = 0$ løsningen $x = -2$, da 2 går op i 4, mens $3x + 2 = 0$ ingen løsning har i \mathbf{Z} , da 3 ikke går op i 2.

Nuvel, vi kan da i det mindste løse flere ligninger nu, hvor vi har \mathbf{Z} til rådighed i stedet for kun \mathbf{N} , men vi mangler åbenbart stadig tal. Her kommer de rationale tal $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$ ind i billedet. Nu har ligningen

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbf{Q}, a \neq 0,$$

altid en løsning. Vi kan nemlig sætte $x = \frac{-b}{a}$.

Glæden varer ikke længe, for ikke alle ligninger er så simple som ligningerne ovenfor. Hvad med andengradsligninger? Den simpleste af slagsen er på formen

$$x^2 + a = 0, \quad a \in \mathbf{Q}.$$

Har den en løsning $x \in \mathbf{Q}$? Hvis nu vi for eksempel har $a = -4$, så lyder ligningen $x^2 - 4 = 0$, og den har to løsninger, nemlig $x = -2$ og $x = 2$. Hvad nu hvis $a = -2$? Så er ligningen $x^2 - 2 = 0$, altså $x^2 = 2$. Har denne ligning en løsning $x \in \mathbf{Q}$? Nej! Lad os bevise, at det er tilfældet.

Påstand 1.1. Der findes ikke et rationalt tal $x = \frac{p}{q}$, som opfylder $x^2 = 2$.

Bevis. Lad os prøve at antage, at $x = \frac{p}{q}$ er et rationalt tal, som opfylder, at $x^2 = 2$. Vi vil nu vise, at det er noget værre vrøvl.

Vi kan antage, at brøken $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Først ser vi, at

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \implies \frac{p^2}{q^2} = 2 \implies p^2 = 2q^2.$$

Det vil sige, at 2 går op i p^2 , så p^2 må være et lige tal. Hvis man ganger et *ulige* tal med sig selv, får man igen et ulige tal, så p kan ikke være ulige. Altså er p lige. Med andre ord går 2 op i p , så vi kan skrive $p = 2n$ for et $n \in \mathbf{Z}$.

Nu ser vi, at

$$p^2 = 2q^2 \implies (2n)^2 = 2q^2 \implies 4n^2 = 2q^2 \implies 2n^2 = q^2.$$

Altså går 2 op i q^2 , som så er et lige tal. Som i tilfældet med p ovenfor får vi, at q så også er lige. Dette betyder, at 2 går op i q , så vi kan skrive $q = 2m$ for et $m \in \mathbf{Z}$. Da er

$$\frac{p}{q} = \frac{2n}{2m} = \frac{n}{m},$$

og det er noget vrøvl, da vi jo ved bevisets begyndelse antog, at brøken $\frac{p}{q}$ var uforkortelig. Dette afslutter beviset. \square

Vi har nu set, at ligningen $x^2 - 2 = 0$ ikke har nogen løsning $x \in \mathbf{Q}$, så endnu engang har vi brug for flere tal. Hjælpen er nær! De reelle tal \mathbf{R} er netop, hvad vi har brug for. Ligningen

$$x^2 - 2 = 0$$

har nemlig løsningerne $x = -\sqrt{2}$ og $x = \sqrt{2}$, som begge er reelle tal.

Jublen vil ingen ende tage ... og dog! Hvad med ligningen

$$x^2 + 1 = 0.$$

Denne ligning har ingen løsning $x \in \mathbf{R}$. Ligningen er nemlig ensbetydende med $x^2 = -1$, men $x^2 \geq 0$ for alle $x \in \mathbf{R}$. Endnu engang har vi altså brug for flere tal, men hvilke tal? Hvad er det næste led i rækken

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \dots ?$$

2 De komplekse tal

Lad \mathbf{C} betegne mængden af alle par (a, b) af reelle tal. Vi vil nu definere en måde, hvorpå vi kan lægge sammen og gange sammen i \mathbf{C} . Lad os sætte

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

for alle par (a, b) og (c, d) i \mathbf{C} . Nogle kender måske dette under navnet vektoraddition. Denne måde at lægge sammen på virker meget naturlig; vi lægger simpelthen blot sammen koordinatvis. Hvordan skal vi så gange sammen? Her er vi smarte og sætter

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

for alle par (a, b) og (c, d) i \mathbf{C} . Lad os lige se et eksempel!

Eksempel 2.1. Sæt $x = (1, 2)$ og $y = (4, \sqrt{\pi})$. Da er

$$x + y = (1, 2) + (4, \sqrt{\pi}) = (1 + 4, 2 + \sqrt{\pi}) = (5, 2 + \sqrt{\pi})$$

$$x \cdot y = (1, 2) \cdot (4, \sqrt{\pi}) = (1 \cdot 4 - 2 \cdot \sqrt{\pi}, 2 \cdot 4 + 1 \cdot \sqrt{\pi}) = (4 - 2\sqrt{\pi}, 8 + \sqrt{\pi}).$$

Mængden \mathbf{C} udstyret med regneoperationerne $+$ og \cdot kaldes de *komplekse* tal. Lad os lige tjekke, at $+$ og \cdot på \mathbf{C} har en række gode egenskaber.

Påstand 2.2. *Der gælder følgende:*

- (1) $x + y = y + x$ for alle $x, y \in \mathbf{C}$.
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ for alle $x, y, z \in \mathbf{C}$.
- (3) $x \cdot y = y \cdot x$ for alle $x, y \in \mathbf{C}$.
- (4) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ for alle $x, y, z \in \mathbf{C}$.
- (5) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ for alle $x, y, z \in \mathbf{C}$.
- (6) Der findes et element $0 \in \mathbf{C}$, så $x + 0 = x$ for alle $x \in \mathbf{C}$.
- (7) For alle $x \in \mathbf{C}$ findes et $y \in \mathbf{C}$, så $x + y = 0$.
- (8) Der findes et element $1 \in \mathbf{C}$, så $x \cdot 1 = x$ for alle $x \in \mathbf{C}$.
- (9) For alle $x \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ findes et $y \in \mathbf{C}$, så $x \cdot y = 1$.

Bevis. Vi viser kun nogle få af punkterne. Beviserne for de resterende overlades til læseren som øvelser.

Lad $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ og $z = (e, f)$ være tre komplekse tal. Ved at bruge det, vi ved om *reelle* tal, finder vi

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= ((a, b) + (c, d)) + (e, f) \\ &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)) \\ &= x + (y + z),\end{aligned}$$

hvilket beviser (2). Ved at bruge definitionen af \cdot på \mathbf{C} får vi

$$\begin{aligned}x \cdot y &= (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \\y \cdot x &= (c, d) \cdot (a, b) = (ca - db, cb + da).\end{aligned}$$

Da $ac - bd = ca - db$ og $bc + ad = cb + da$, følger det, at $x \cdot y = y \cdot x$. Dette beviser (3). Beviserne for mange af de øvrige punkter er tilsvarende.

Som 0 kan vi bruge $(0, 0)$. Dette opfylder nemlig

$$x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = x,$$

og det overlades til læseren at bruge definitionen af \cdot til at vise, at vi som 1 kan bruge det komplekse tal $(1, 0)$.

Det er også let at se, at det komplekse tal $(-a, -b)$ opfylder kravet i punkt (7), og at det komplekse tal

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

opfylder kravet i punkt (9). □

Det faktum, at regnereglerne ovenfor er opfyldt, udtrykker man ofte kort ved at sige, at \mathbf{C} er et *legeme*.

Bemærkning 2.3. Ved helt elementære udregninger ser man, at

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{og} \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

for alle $a, b \in \mathbf{R}$. Det vil altså sige, at vi kan tænke på \mathbf{R} som en delmængde af \mathbf{C} , altså $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, hvis vi identificerer $a \in \mathbf{R}$ med $(a, 0) \in \mathbf{C}$.

Bemærkning 2.4. En elementær udregning viser, at

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Sæt nu $i = (0, 1)$. Med denne notation siger bemærkningen ovenfor, at $i^2 = (-1, 0) = -1$. Da har vi, hvis vi altså bruger identificationen $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, at der for alle $a, b \in \mathbf{R}$ gælder, at

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

og med denne notation er

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad - bc)i,$$

som forklarer den mystiske definition af \cdot på \mathbf{C} .

Øvelser

Øvelse 1. Lad $x = 4 + 7i$ og $y = 6 - i$ være komplekse tal.

(A) Beregn $x + y$ og xy .

(B) Find y^{-1} og beregn x/y .

Øvelse 2. Lad $x = a + bi$ være et vilkårligt komplekst tal. Da defineres det *komplekst konjugerede* tal til x ved $\bar{x} = a - bi$. Husk, at $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(A) Vis, at $x\bar{x} = |x|^2$.

(B) Slut af (A), at der for $x \neq 0$ gælder, at $x^{-1} = \frac{1}{|x|^2}\bar{x}$.

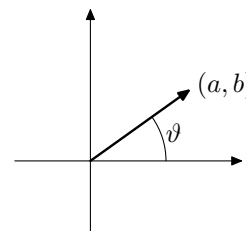
(C) Kontroller, at det i (B) fundne udtryk for x^{-1} stemmer overens med det påståede i beviset for Påstand 2.2.

Øvelse 3. Sæt $x = 1 + i$ og beregn x^{12} .

3 Geometri og rødder

Et komplekst tal $x = (a, b) \in \mathbf{C}$ er blot et punkt i planen, og som sædvanlig definerer vi *længden* af x som $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Antag, at $x \neq 0$. Da danner linjen gennem $(0, 0)$ og (a, b) en vinkel ϑ med førsteaksen, og vi kan skrive

$$x = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad \text{hvor } r = |x|.$$



Vi siger, at x er skrevet på *polær* form.

Ved at bruge additionsformler for sinus og cosinus kan man vise følgende påstand.

Påstand 3.1. *Lad $x = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ og $y = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ være komplekse tal. Da er*

$$x \cdot y = rs(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi)).$$

Bemærk, at ovenstående påstand siger, at multiplikation af komplekse tal har meget med geometri at gøre! Længden af produktet af to tal er produktet af de to tals længder, og den vinkel, som produktet danner med førsteaksen, er summen af de vinkler, som de to tal danner med førsteaksen.

Eksponentialfunktionen kan udvides til de komplekse tal ved at definere

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Her betegner e^a den sædvanlige eksponentialfunktion taget på $a \in \mathbf{R}$. Specielt gælder der, at

$$e^{i\pi} = e^0(\cos \pi + i \sin \pi) = -1.$$

Bemærk denne smukke formel! De fire (meget interessante!) tal 1, e , π og i er her knyttet sammen på en meget simpel måde.

Bemærkning 3.2. Ved at benytte Påstand 3.1 ovenfor kan man vise, at $e^{x+y} = e^x e^y$ for alle $x, y \in \mathbf{C}$.

Bemærk, at definitionen af eksponentialfunktionen giver, at

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

for alle vinkler ϑ . Altså er ethvert komplekst tal x på formen

$$x = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r e^{i\vartheta}.$$

Lad nu $x = r e^{i\vartheta}$ være et komplekst tal, og lad $n \geq 1$ være et naturligt tal. Sæt $w = \sqrt[n]{r} e^{i\vartheta/n}$. Da er

$$w^n = (\sqrt[n]{r})^n (e^{i\vartheta/n})^n = r e^{i\vartheta} = x,$$

så w er en n -te rod af x . Det vil altså sige, at *alle* komplekse tal har en n -te rod! For eksempel har det komplekse tal -2 , altså $(-2, 0)$, en kvadratrod. Faktisk er der to, nemlig $\pm i\sqrt{2}$. Vi har altså nu set, at ligningen

$$x^2 + 2 = 0,$$

som tidligere voldte os kvaler, kan løses! Vi har altså fundet det sidste led i kæden

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Generelt gælder der, at alle komplekse tal (undtagen nul) har præcis n forskellige n -te rødder. Faktisk gælder der, hvis $x = re^{i\vartheta}$, at

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\vartheta + 2\pi k}{n}}, \quad \text{hvor } k = 0, 1, \dots, n-1$$

er alle n -te rødder af x . Vi vil ikke vise dette.

Øvelser

Øvelse 4. Lad $x = 1 + i$ og $y = i$.

- (A) Indtegn x og y i et koordinatsystem.
- (B) Skriv x og y på polær form.
- (C) Beregn produktet xy og skriv resultatet på polær form.
- (D) Kontroller, at resultatet stemmer overens med Påstand 3.1.

Øvelse 5. Der gælder følgende additionsformler for sinus og cosinus:

$$\begin{aligned}\cos(\vartheta + \varphi) &= \cos(\vartheta)\cos(\varphi) - \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta + \varphi) &= \sin(\vartheta)\cos(\varphi) + \cos(\vartheta)\sin(\varphi).\end{aligned}$$

Brug disse formler til at bevise Påstand 3.1.

Øvelse 6. Sæt $x = 1 + i$ og skriv x på polær form.

- (A) Find alle seks sjette-rødder af x ved at benytte formlen i slutningen af det foregående afsnit.
- (B) Indtegn rødderne i et koordinatsystem og beskriv deres placering.

Øvelse 7. Tegn et koordinatsystem.

- (A) Beregn alle tredje-rødder af 1. Det vil sige løsningerne til ligningen $x^3 - 1 = 0$. Indtegn løsningerne i koordinatsystemet.
- (B) Vis, at $(x^2 + x + 1)(x - 1) = 0$ for alle løsninger x til ligningen $x^3 - 1 = 0$.
- (C) Slut, at der for enhver løsning $x \neq 1$ i (A) gælder, at $x^2 + x + 1 = 0$. Overvej også dette geometrisk!
- (D) Prøv at generalisere det ovenstående til n -te-rødder af 1, hvor n er vilkårligt.

4 Algebraens fundamentalsætning

Vi har i det foregående været nødt til gentagne gange at “finde på” nye tal for at løse diverse ligninger. Vi begyndte med de naturlige tal, og nu er vi endt med de komplekse tal. Har vi mon brug for flere?

De komplekse tal kom ind i billedet, da vi gik fra førstegradslikninger til andengradslikninger. Hvad så med trejdegradsligninger? Kan man altid løse ligningen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad \text{hvor } a, b, c, d \in \mathbf{C}?$$

Svaret er ja! Hvad så med fjerdegradsligninger og femtegradsligninger? Dem kan vi også løse! Generelt gælder følgende sætning.

Sætning 4.1 (Algebraens fundamentalsætning). *Lad*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

være et polynomium, hvor $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ er komplekse tal. Hvis polynomiet ikke er konstant (altså på formen $f(x) = a$ for et $a \in \mathbf{C}$), så har $f(x)$ n rødder.

Bemærk, at man godt kan risikere at skulle tælle den samme rod med flere gange. For eksempel vil vi sige, at polynomiet $f(x) = x^2 - 4x + 4$ har to rødder. Her er $x = 2$ et eksempel på en såkaldt dobbeltrod.

Vi vil ikke bevise algebraens fundamentalsætning her, da vi ikke har matematiske redskaber nok til rådighed. Det første (rigtige!) bevis for sætningen blev offentliggjort i 1799 af Carl Friedrich Gauss. Siden da er der fundet adskillige andre beviser, som er vidt forskellige fra hinanden.

Den nok mest kendte måde at vise algebraens fundamentalsætning på er følgende: Først udvides differentialregningen til komplekse funktioner, og man viser, at et komplekst polynomium er en differentiabel funktion. Lad f være et polynomium, som ikke er konstant. Antag, at f ingen rødder har, altså at $f(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbf{C}$. Da har vi en veldefineret kompleks funktion $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Man kan vise, at g er en begrænset funktion – det vil sige, at $|g(x)|$ er begrænset – og at dette betyder, at g er konstant (dette kendes også som Liouvilles Sætning). Heraf følger, at også f er konstant, og det er noget vrøvl!

Bemærk, at algebraens fundamentalsætning kun udtaler sig om *eksistensen* af rødderne. Den udtaler sig *ikke* om, hvordan man finder dem! I tilfældet, hvor $f(x) = ax^2 + bx + c$ er et andengradspolynomium, kan man faktisk bruge den velkendte formel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

for rødderne. Bemærk, at denne nu altid giver mening, idet vi nu godt kan tage kvadratroden af et negativt tal.

Man kan faktisk også nedfælde løsningsformler for tredjegrads- og fjerdegradsligninger, men disse formler er meget komplicerede. Mere nedslående er det, at det faktisk er bevist, at man ikke kan skrive løsningsformler ned for n -tegradsligninger, når $n \geq 5$. Matematikken, der skal bruges til at vise dette, er meget langhåret, så det kommer vi ikke ind på i denne omgang.

Øvelser

Øvelse 8. Find de to rødder i $f(x) = x^2 + x + 1$.

Øvelse 9. Find rødderne i $f(x) = x^3 + x$. Hvor mange er der? Hvorfor strider svaret ikke mod algebraens fundamentalsætning?

Øvelse 10. Lad $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, hvor $a_n \neq 0$, være et polynomium. Da defineres *graden* af f som $\text{grad}(f) = n$.

(A) Lad f og g være polynomier med $g \neq 0$. Man kan vise, at der findes polynomier k og r , så

$$f(x) = k(x)g(x) + r(x), \quad \text{hvor } \text{grad}(r) < \text{grad}(g) \text{ eller } r = 0.$$

Antag, at z er en rod i f , og sæt $g(x) = x - z$. Gør rede for, at r er et konstant polynomium.

(B) Brug resultatet fra (A) til at vise, at $r = 0$. Slut heraf, at $x - z$ går op i $f(x)$.

(C) Det oplyses, at 2 er rod i $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Find de øvrige rødder.